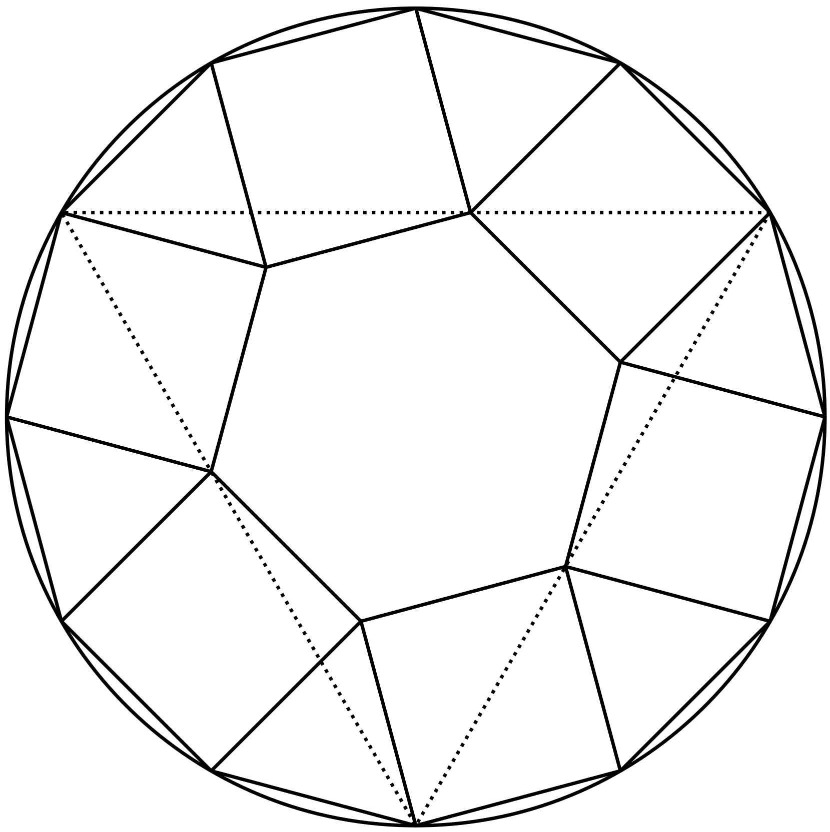
Íslenska stærðfræðafélagið
Félag raungreinakennara í framhaldsskólum

Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2024–2025

Svör og lausnir



Fyrsti hluti

1. Í skúffu Margeirs eru 4 rauðir sokkar, 6 bláir sokkar og 5 hvítir sokkar. Tveir sokkar af sama lit mynda par. Hvað þarf hann að grípa marga sokka í blindni til að vera viss um að hafa náð pari?

☐2 ☐3 ☒4 ☐5

Skýring. Versta tilfelli er að taka einn af hverjum lit, svo svarið er einum meira sem er 4.

2. Jón kaupir stílabækur fyrir námsönnina. Hægt er að kaupa eina stílabók á 300 kr., tvær á 500 kr. eða þrjár á 720 kr. Hann vantar 10 stílabækur og vill ekki kaupa fleiri en það. Hvað kostar það hann í minnsta lagi?

☐2400 kr. ☐2420 kr. ☒2440 kr. ☐2460 kr.

Skýring. Tökum eftir því að $2 \cdot 300 = 600 > 500$ svo við sjáum að hægkvæmsta lausnin tekur í mesta lagi eina staka bók því annars mætti skipta tveimur þeirra út fyrir tilboðið þar sem tvær eru keyptar saman. Nú er $300 + 500 = 800 > 720$ þannig að við sjáum að það er aldrei hagkvæmast að kaupa staka bók með tvennutilboði því þrennutilboð er ódýrara. Að lokum er $3 \cdot 500 = 1500 > 1440 = 2 \cdot 720$ svo hægkvæmara er tð taka tvö þrennutilboð í stað þriggja tvennutilboða. Því er í mesta lagi tvö tvennutilboð notuð. Hagkvæmast er því að velja, 0, 1 eða tvö tvennutilboð og taka svo eins mörg þrennutilboð og unnt er og kaupa svo stakar bækur þar á eftir.

- Ef ekkert tvennutilboð er tekið þá eru þrjú þrennutilboð tekin og ein stök bók þar með. Það kostar $3 \cdot 720 + 300 = 2460$ kr.
- Ef eitt tvennutilboð er tekið þá eru tvö þrennutilboð tekin og þá vantar tvær stakar bækur. Það getur ekki verið hagkvæmast þar sem tvær stakar bækur voru keyptar.
- Ef tvö tvennutilboð er tekið þá eru tvö þrennutilboð tekin með því og ekki þarf að kaupa staka bók. Þessi samsetning kostar $2 \cdot 500 + 2 \cdot 720 = 2440$ kr.

Af þessu sést að hagkvæmast er að taka tvö tvennutilboð og tvö þrennutilboð fyrir kostnaðinn 2440 kr.

3. Hrefna kastar 20 hliða teningi með tölunum $1, 2, \ldots, 20$ á hliðunum og Magni kastar 6 hliða teningi með tölunum $1, 2, \ldots, 6$ á hliðunum. Allar tölur á hverjum teningi eru jafn líklegar og köstin eru óháð hvoru öðru. Hverjar eru líkurnar á að þau fái sömu niðurstöðu?

☐1/120 ☒1/20 ☐1/6 ☐1/2

Skýring. Þegar Hrefna kastar þá fær hún einhverja af tölunum $1, 2, \ldots, 6$. Það eru 20 tölur á teningnum hans Magna og allar þeirra jafn líklegar. Líkurnar á því að hann fái sömu tölu og Hrefna eru því $\frac{1}{20}$.

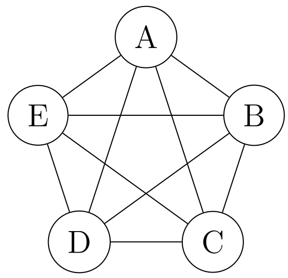
4. Meðalhæð í bekk með 19 nemendum er 160cm. Svo bætist nýr nemandi í bekkinn, hann Stórólfur, sem er 200cm á hæð. Hver er nýja meðalhæð bekksins?

☐158cm ☐160cm ☒162cm ☐164cm

Skýring. Summa hæða þeirra 19 sem voru í bekknum er $19 \cdot 160\text{cm} = 3040\text{cm}$ svo summa hæða nemendanna eftir að Stórólfur kemur í bekkinn er $3040\text{cm} + 200\text{cm} = 3240\text{cm}$. Meðalhæðin með Stórólfi er því $\frac{3240\text{cm}}{20} = 162\text{cm}$.

Önnur leið til að reikna þetta er að taka eftir því að Stórólfur er 40cm yfir meðaltalinu. Það hefði því sömu áhrif á meðalhæðina að bæta einum 160cm nemenda við bekkinn og láta svo alla nemendurnar vaxa um 2cm (þar sem $20 \cdot 2\text{cm} = 40\text{cm}$. Meðalhæðin er því 162cm með Stórólfi.

5. Lita skal öll strikin á myndinni þannig að það verði engir einlita þríhyrningar með hringina sem hornpunkta. Hver er fæsti fjöldi lita sem við þurfum í það?



☐1 ☒2 ☐3 ☐4

Skýring. Ef við notum aðeins einn lit þá er ljóst að við höfum einlitann þríhyrning. Við þurfum því að minnsta kosti tvo liti. Það kemur í ljós að við getum litað hliðarnar með tveimur litum þannig að skilyrðið um enga einlita þríhyrninga sé fullnægt.

Litum hliðar fimmhyrningsins $ABCDE$ í rauðum og hliðar stjörnunnar $ACEBD$ í bláum. Í einlitum rauðum þríhyrningi eru allar hliðar hans aðlægar horri annarri innan fimmhyrnings $ABCDE$ en það gengur ekki. Eins er ekki unnt að finna einlitan bláann þríhyrning.

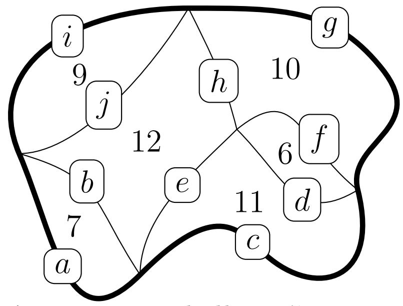
6. Heiltölurnar m, n eru báðar oddatölur. Hver eftirfarandi talna er oddatala?

☐$m + n$ ☐$(m + 1)n$ ☐$m(n + 1)$ ☒mn

Skýring. Nú eru m og n oddatölur svo finna má heiltölur a og b þannig að $m = 2a+1$ og $n = 2b + 1$.

1. Nú er $m+n=(2a+1)+(2b+1)=2(a+b+1)$ svo $m+n$ er slétt.
2. Nú er $(m+1)n=((2a+1)+1)n=2(a+1)n$ svo $(m+1)n$ er slétt.
3. Nú er $m(n+1)=m((2b+1)+1)=2m(b+1)$ svo $m(n+1)$ er slétt.
4. Nú er $mn=(2a+1)(2b+1)=4ab+2a+2b+1=2(2ab+a+b)+1$ svo mn er oddatala.

7. Á myndinni hér til hægri er kort af lystigarðinum í Jómsborg. Talan innan í hverju svæði sýnir hve margar mínútur Þorkell er að ganga í kringum um það. Hve margar mínútur er Þorkell að ganga umhverfis allan garðinn, það er breiðu leiðina?



☐17 ☐18 ☒19 ☐20

Skýring. Látum $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ og j vera fjölda mínútna sem Þorkell er að ganga hvern af stígunum eins og sem merktir er á myndinni að ofan. Af því sem er gefið fæst að

$$a+b=7, \quad c+d+e=11, \quad d+f=6,$$
$$f+g+h=10, \quad i+j=9, \quad b+e+h+j=12$$

Við viljum reikna $a+c+g+i$. Nú er

$$(a+b)+(c+d+e)+(f+g+h)+(i+j)-(d+f)-(b+e+h+j)=a+c+g+i$$

Af þessu sést að

$$a+c+g+i=7+11+10+9-6-12=19.$$

8. Í tilteknum menntaskóla skrá sig allir í þýsku, frönsku eða bæði. Einn níundi þýskunemenda er einnig í frönsku, og einn sjöundi frönskunemenda er einnig í þýsku. Hversu hátt hlutfall allra nemenda er í þýsku?

☐1/2 ☐9/16 ☒3/5 ☐7/9

Skýring. Köllum fjölda nemenda sem læra bæði fög n. Þá er fjöldi nemenda í þýsku $9n$ og fjöldi nemenda í frönsku $7n$. Heildarfjöldi nemenda er þá $9n+7n-n=15n$. Þar með er hlutfall nemenda í þýsku $9n/15n=3/5$.

9. Hver er afgangurinn þegar 11 er deilt upp í $10^{10}+1$?

☐0 ☒2 ☐5 ☐7

Skýring. Athugum að

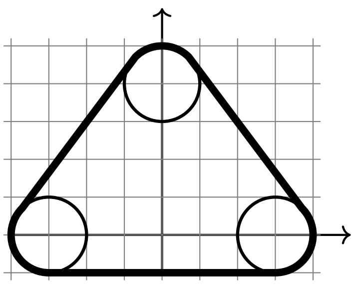
$$10^{10}+1 = 9.999.999.999+2 = 11\cdot 909.090.909+2$$

Þá er ljóst að afgangurinn er 2. Einnig væri hægt að nota litlu setningu Fermat, þá fæst svarið beint, eða skoða víxlsummu tölunnar, 10000000001 sem er samleifa afganginum mátað við 11

$$1-0+0-0+0-0+0-0+0-0+1=2$$

10. Utan um hringina þrjá hér til hliðar er búið að strekkja gúmmíteygju. Hringirnir hafa allir geisla af lengd 1 og miðjur $(-3,0),(3,0),(0,4)$. Hver er lengd teygjunnar?

☐ 12π ☐ $12+2\pi$ ☐ 16π ☒ $16+2\pi$



Skýring. Þetta má búta niður í þrjú línustrik og þrjá hringboga. Hringbogarnir mynda heilan hring og strikin þríhyrning gegnum miðjur hringjanna. Því eru strikin af lengd 6, 5 og 5. Þar með er lengdin $16+2\pi$.

Annar hluti

11. 100 manns mæta á ráðstefnu, 50 þeirra tala íslensku, 50 þeirra ensku og 50 þeirra dönsku. Allir þeirra tala að minnsta kosti eitt tungumálanna. Hver er hámarksfjöldi einstaklinga sem tala aðeins eitt tungumálanna?

Svar: 75

Skýring. Látum x_i tákna fjölda manns sem tala i tungumál. Þá er $x_1+2x_2+3x_3 = 150$ og $x_1+x_2+x_3=100$, við viljum lausn með hæsta gildi á x_1. Með því að draga fyrri jöfnuna frá þrisvar sinnum þá síðari fæst $2x_1+x_2=150$, svo það að hámarka x_1 er jafngilt því að lágmarka x_2. En ef við setjum $x_2=0$ fæst $x_1=75$ og $x_3=25$, sem er umbeðin lausn.

12. Rita má $\frac{2025}{2024} - \frac{2024}{2025}$ sem fullstytt brot p/q. Hvert er gildi p?

Svar: 4049

Skýring. Reikna má út að $\frac{n+1}{n} - \frac{n}{n+1}$ sé jafnt $\frac{2n+1}{n(n+1)}$. Þetta er fullstytt brot því $2n+1$ er ósamþátta n og $n+1$. Fyrir $n = 2024$ fæst því að $2n+1 = 4049$ sem þá gildið á p.

13. Ólafur ódauðlegi fæddist 1. janúar 2002 og mun aldrei deyja. Á afmæli sínu árið 2003 var hann eins árs og þá deildi aldur hans ártalinu, það er $2003/1$ er heiltala. Hversu oft mun það gerast að aldur Ólafs í árum deili ártalinu?

Svar: 16

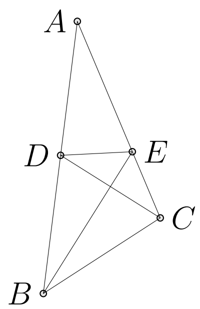
Skýring. Skilyrði dæmisins má rita sem að $\frac{x+y}{y} \in \mathbb{N}$ þar sem x er fæðingarár Ólafs og y er aldur hans. Nú er $\frac{x+y}{y} = 1 + \frac{x}{y}$ svo að aldur Ólafs þarf að vera deilir fæðingarársins. Deilar $2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ eru 16 talsins, $1, 2, 7, 11, 13, 14, 22, 26, 77, 91, 143, 154, 182, 286, 1001, 2002$.

14. Þekkingarfræðingarnir Eydís og Sigvaldi eru hvor um sig með tölu á enni sínu og sitja hvort á móti öðru. Þau sjá ekki eigin tölu en sjá hina og vita bæði að tölurnar séu jákvæðar heiltölur. Saga sannsögla segir þeim að summa talnanna eða margfeldi talanna sé 50. Eydís segir við Sigvalda: „Ég veit ekki hvaða tala er á enni mínu“. Þá svarar hann: „Ekki ég heldur“. Hvaða tala er á enni Eydísar?

Svar: 25

Skýring. Ef Sigvaldi er með tölu á enni sínu sem deilir ekki 50 veit Eydís um leið að tala sín er 50 mínus talan á enni Sigvalda. Ef talan á enni Sigvalda væri 50 myndi Eydís líka vita að sín tala væri 1. Því er talan á enni Sigvalda 1, 2, 5, 10 eða 25. Sama gildir um töluna á enni Eydísar. En Sigvaldi veit það eftir að Eydís segist ekki vita tölu sína. Eina leiðin til að fá summu sem er jöfn 50 er $25 + 25$, svo ef Eydís sér einhverja tölu aðra en 25 veit hún að sín tala er 50 deilt með því sem hún sér. Því er svarið 25, og Sigvaldi er með töluna 25 eða 2.

15. Gefnir eru fimm punktar, A, B, C, D og E. Punktur D liggur á strikinu frá A til B og punktur E á strikinu frá A til C. Stærð horns $\angle BAC$ er $30°$, stærð horns $\angle ABC$ er $50°$, stærð horns $\angle ACD$ er $35°$ og stærð horns $\angle AED$ er $70°$. Hve margar gráður er stærð horns $\angle BED$?



Svar: 55

Skýring. Af hornasummu þríhyrnings ABC fæst að stærð horn $\angle ACB$ er $100°$. Þar sem D liggur innan í horninu $\angle ACB$ svo stærð horns $\angle BCD$ er $65°$. Litið á þríhyrning BCD þá sést að stærð horns $\angle BDC$ er $65°$. Hornin $\angle BCD$ og $\angle BDC$ eru jafnstór svo $|BC| = |BD|$. Með því að skoða þríhyrning ACD fæst að stærð horn $\angle ADC$ er $115°$. Nú eru $\angle AED$ og $\angle CED$ grannhorn svo stærð $\angle CED$ er $110°$. Beiting reglu um hornasummu á þríhyrning CDE sýnir að stærð horns $\angle CDE$ er $35°$. Því eru hornin $\angle CDE$ og $\angle DCE$ jafnstór og því $|CE| = |DE|$. Þar sem tilsvarandi hliðar þríhyrninga BCE og BDE eru jafnlangar þá eru hornin $\angle BEC$ og $\angle BED$ jafnstór og mynda til samans hornið $\angle CED$. Þar sem stærð horns $\angle CED$ er $110°$ þá sést að stærð horns $\angle BED$ er $55°$.

Þriðji hluti

Dæmi 16
Gefnar eru fjórar rauntölur $a, b, c, d \geq 0$. Vitað er að $a + b = c + d$ og að $ac = bd$. Sýnið að $a = d$.

Lausn 1
Margföldum fyrri jöfnuna með a. Þá fæst

$$a(a + b) = a^2 + ab = ac + ad = bd + ad = d(a + b).$$

Ef $a + b \neq 0$ þá fæst að $a = d$. En ef $a + b = 0$ þá er $a = b = 0$ þar sem $a, b \geq 0$ og eins $c = d = 0$ þar sem $c + d = a + b$. Í báðum tilvikum er $a = d$. $\square$

Lausn 2
Ef $a = 0$ er annað hvort $b = 0$ eða $d = 0$. Ef $d = 0$ er sönnun lokið, svo við gerum ráð fyrir að $b = 0$. Þá er $a + b = 0$ svo $c = d = 0$ fyrst $c, d \geq 0$, sem lýkur einnig sönnun.

Því gera ráð fyrir að $a \neq 0$, þá er $c = bd/a$. Það gefur $a + b = bd/a + d$ sem má umrita sem $b(1 - d/a) = d - a$. Þá er $b(a - d) = a(d - a)$. Ef $a = d$ er sönnun lokið, svo við gerum ráð fyrir að $a \neq d$. Þá er $b = -a$, sem gefur $a, b = 0$ fyrst $a, b \geq 0$. En þetta er mótsögn, svo við erum búin. $\square$

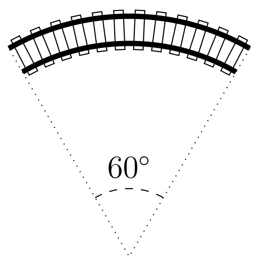
Dæmi 17
Hvað hefur jafnan $x^2 = 2024 + y^2$ margar lausnir þar sem x og y eru jákvæðar heiltölur? *Ábending: Skoðið* $x = 45$.

Lausn

Skoða þáttun $(x-y)(x+y) = 2024$, hvor þáttur fyrir sig þarf einn tvist til að hafa sama formerki. Því þarf bara að prófa allar leiðir til að dreifa hinum frumþáttunum, þ.e.a.s. $2, 11, 23$. Að prófa þetta gefur lausnir $(507, 505), (255, 251), (57, 35)$ og $(45, 1)$. $\square$

Dæmi 18

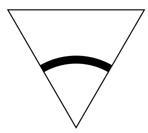
Brynjar á leikfangalest og dundar sér oft við að leggja brautir fyrir lestina. Hann á eina gerð af brautarbút sem er $60°$ hringbogi sem má snúa hvort sem er til hægri eða vinstri. Sporin mega ekki liggja yfir hvoru öðru. Allir bútarnir eru jafnstórir. Hann notar n búta til að leggja braut sem er lokaður ferill þannig að lestin geti farið eftir henni hring eftir hring. Finnið öll n þannig að þetta sé hægt.



Lausn

Talan n getur verið 6, eða hvaða slétta tala sem er frá og með 10.

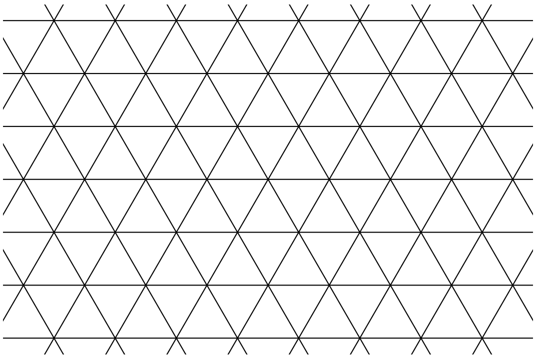
Fyrir hvern bút getum við dregið jafnhliða þríhyrning utan um hann þannig að búturinn liggi á milli miðpunkta á þríyhrningnum. Þríhyrningurinn hefur þannig hliðarlengd sem er tvöföld lengd beygjugeisla beygjanna. Eins má fyrir hvern svona þríhyrning finna beygjuspor sem tengi tvo miðpunkta hliða hans (sjá mynd 1). Við sjáum því að braut Brynjars jafngildir því að búa til hringveg með jafnhliða þríhyrningum þannig að aðlægir þríhyrningar deili hlið (það jafngildir því að sporbútarnir tengist).



Mynd 1: Þríhyrningur utan um brautarbút

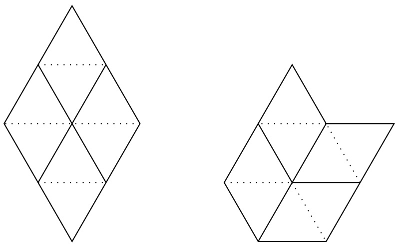
Leggjum niður fyrsta þríhyrninginn og skoðum flísalagninguna á sléttunni með þessum jafnhliða þríhyrningum (sjá mynd 2). Hringvegur Brynjars svarar til einhverra af flísunum. Skoðum allar línurnar í sléttunni. Ljóst er að vegurinn fer sléttum fjölda sinnum yfir hverja þeirra því annars myndi vegurinn fara yfir línuna án þess að snúa við. Hverja hlið má svara til hliðarinna þar sem hún fer yfir línuna. Því sést að fjöldi búta þarf að vera sléttur. (Önnur leið til að sjá þetta er að taka eftir því að í hringveginum skiptast þríhyrningarnir á því að snúa upp og niður).

Tveir aðlægir jafnhliða þríhyrningar mynda tigull með $60°$ og $120°$ horni. Ljóst er að einn tigull myndar ekki hringveg og tveir þríhyrningar geta ekki heldur myndað hringveg. Ef bútarnir eru fjórir þá eru nákvæmlega tvær leiðir til þess að mynda hringveg með þeim (sjá mynd 3). Það svarar samt ekki til hringvegar með 8 þríhyrningum. Af



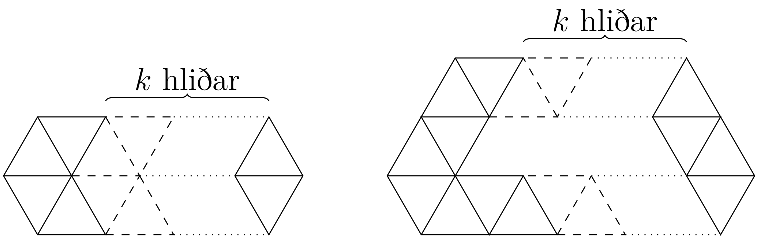
Mynd 2: Flíslagning með jafnhliða þríhyrningum

þessu sést að ógerlegt er að mynda hringveg með 2, 4 eða 8 bútum.



Mynd 3: Hringvegir með fjórum tiglum

Auðvelt er að sýna að unnt er að búa til hringbraut með $6 + 4k$ bútum og $12 + 4k$ bútum þar sem $k \in \mathbb{N}$, eins og sjá má á mynd 4.

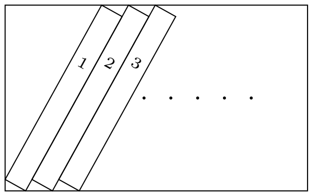


Mynd 4: Hringvegir með $6 + 4k$ og $12 + 4k$ bútum

$\square$

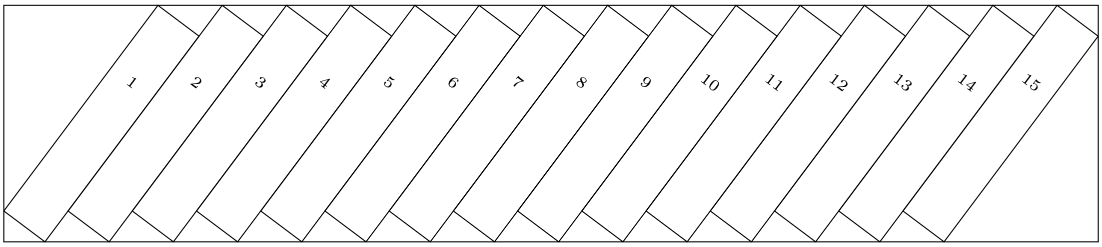
Dæmi 19

Jörmunrekur er að stafla möppum með rétthyrndum kili í hornrétta hillu hjá sýslumanni. Hillan er 184 mm á hæð, en möppurnar eru því miður 200 mm á hæð. Því komast þær ekki uppréttar í hilluna og þarf hann að raða þeim öllum á ská (sjá mynd). Hver mappa er 40 mm á þykkt og hillan er 852 mm á lengd. Hvað komast margar möppur í hilluna með þessum hætti? Gera má ráð fyrir að hillan sé mátulega djúp fyrir möppurnar.



Lausn

Svar er 15 eins og sjá má á mynd 5 hér að neðan.



Mynd 5: Allar fimmtán möppurnar í hillu sýslumanns

Við látum $a = 184$ mm vera hæð hillunnar, $b = 852$ mm vera breidd hennar, $h = 200$ mm vera hæð hverrar möppu og $w = 40$ mm vera breidd þeirra. Héðan í frá munu allar lengdir vera gefnar í mm.

Köllum efra vinstra, efra hægra, neðra hægra og neðra vinstra horn bókahillunnar R, S, T og U, í sömu röð. Látum A_i, B_i, C_i og D_i vera efra vinstra, eftra hægra, neðrar hægra og neðra vinstra horn möppu númer i fyrir hvert i. Látum x vera fjarlægð C_1 frá vinstri enda hillunnar og y vera hæð D_1 yfir neðri brún hillunnar. Látum s vera fjarlægð D_1 frá efri brún hillunnar og t vera fjarlægð A_1 frá vinstri brún hillunnar. Látum svo P_i vera hornrétt ofanvarp B_i á efri brún hillunnar. Látum z vera fjarlægð P_1 frá A_2. Látum svo d vera fjarlægðina frá P_1 til P_2. Sjá mynd 6 hér að neðan.

Nú er hornið $\angle A_1D_1C_1$ rétt auk þess sem hornin $\angle C_1UD_1$ og $\angle D_1RA_1$ eru það einnig svo við sjáum að rétthyrndu þríhyrningarnir C_1UD_1 og D_1RA_1 eru einslaga. Látum $c = \frac{h}{w} = \frac{200}{40} = 5$. Við fáum því

$$\frac{s}{x} = \frac{t}{y} = \frac{h}{w} = c$$

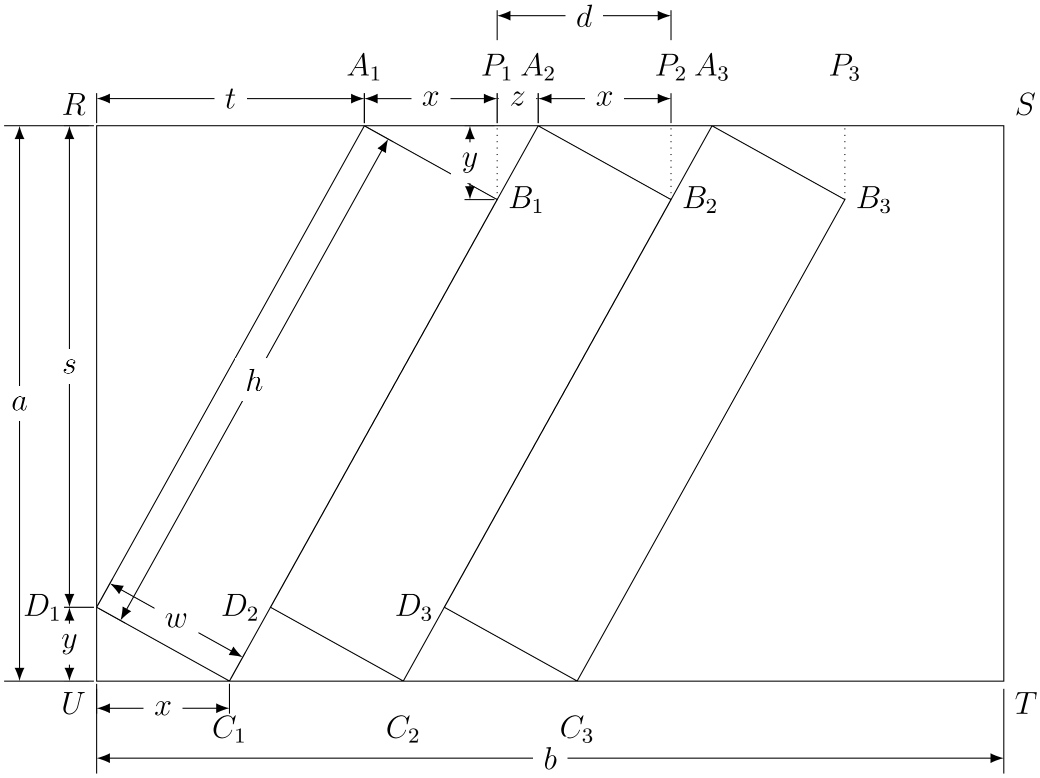
Af þessu sést að $s = cx$ og $t = cy$.

Með því að beita setingu Pýþagórasar á þríhyrningana C_1UD_1 og D_1RA_1 fæst

$$x^2 + y^2 = w^2 \quad \text{og} \quad s^2 + t^2 = h^2.$$

Nú er $a = y + s$ svo $y = a - s = a - cx$. Af þessum jöfnum fæst því

$$x^2 + (a - cx)^2 = w^2$$



Mynd 6: Mál hillu sýslumanns

það er

$$(c^2+1)x^2-2acx+a^2-w^2=0.$$

Setjum inn fyrir þessi gildi og fáum

$$26x^2-1840x+32256=0.$$

Við styttum með 2 og fáum því

$$13x^2-920x+16128=0$$

Þetta má þátta

$$(13x-504)(x-32)=0$$

Af þessu sést að $x=\frac{504}{13}$ eða $x=32$ Því er

$$s=cx=\begin{cases}\frac{2520}{13} & \text{ef } x=\frac{504}{13}\\ 160 & \text{ef } x=32\end{cases}$$

Nú er $\frac{2520}{13}>193>184$ svo við getum útilokað að $x=\frac{2520}{13}$. Við sjáum því að

$$x=32 \quad \text{og} \quad s=160$$

Því er

$$y=a-s=24 \quad t=cy=120$$

Nú eru þríhyrningarnir $A_1P_1B_1$ og C_1UD_1 samsniða og þríhyrningur $B_1P_1A_2$ er einslaga þeim. Því er

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{z}$$

það er

$$z = \frac{y^2}{x} = \frac{24^2}{32} = \frac{567}{32} = 18.$$

Af þessu sjáum við að

$$|RP_1| = t + x = 120 + 32 = 152$$

og

$$|P_1P_2| = x + z = 32 + 18 = 50$$

Nú er $|P_1P_2| = |P_2P_3| = |P_3P_4| = \dots$ svo n möppur þurfa hillu af lengd að minnsta kosti

$$|RP_1| + (n-1) \cdot d = 152 + (n-1) \cdot 50 = 102 + n \cdot 50$$

Þar sem hillan hefur lengdi $b = 802$ þá fæst ójafnan

$$102 + n \cdot 50 \leq 802$$

það er

$$n \leq 15$$

Af þessu sést að í mesta lagi 15 möppur komast í hillu sýslumannsins. □